دراسة لبعض المجموعات القريبة من المجموعات المفتوحة

مفيدة حميده[1]، نهى الجمل[2]
قسم الرياضيات، كلية العلوم- جامعة مصراتة
Email: mu.hmaida@sci.misuratau.edu.ly[1], nohaalhadi@yahoo.com[2]

Submission data 15 . 01.2023 Acceptance data 10. 2 .2023 Electronic publishing data: 15.02.2023

المخلص: تشتمل هذه الورقة على دراسة لبعض تعميمات لتعريف مجموعة مفتوحة في فضاء تبولوجي، تحديداً المجموعات المفتوحة-b، المفتوحة-b^*، مفتوحة-b^* . من ضمن هذه التعميمات تعريفين مختلفين للمجموعات المفتوحة-b^*، وبعد مقارنتهما تم إثبات عدم تكافئهما. إضافة لدراسة خصائص المجموعات المفتوحة-b^* والدوال المتصلة - b^* .

الكلمات المفتاحية: مجموعة مفتوحة-b، مفتوحة-b^*، مفتوحة- b^* ، الدوال المتصلة - b^*.

المقدمة

قدم العديد من الباحثين عدة تعريفات تعمم تعريف المجموعة المفتوحة وتعمم بناء عليه مفهوم الاتصال في الفضاء التبولوجي. كان ليفين[7] هو أول من قدم مفهوم المجموعات شبه المفتوحة والدوال شبه المتصلة في الفضاء التبولوجي خلال القرن العشرين. قدّم العديد من الرياضيين بعده عدة تعريفات تعمم تعريف المجموعة المفتوحة. على سبيل المثال؛ قدم نجاستد [12] مفهوم المجموعة المفتوحة-α، وقدم مشهوار وآخرون في [8] مفهوم المجموعات المفتوحة مبدئيا في الفضاء التبولوجي، بينما وضع انديجيفتش [1] تعريفاً لفئة المجموعات المفتوحة-b وهي فئة محتواه ضمن فئة المجموعات نصف المفتوحة مبدئيا وتحتوي كل المجموعات نصف المفتوحة والمفتوحة مبدئيا. علاوة على ذلك، فإن تسميات أخرى وتعريفات جديدة أضيفت من قبل باحثين آخرين مثل مفتوحة-γ، و مفتوحة-ps ، مفتوحة-b^*، مفتوحة-b^{**}، مفتوحة- b^* ، مفتوحة- b^{**}، مفتوحة- β [2]. إلا أن بعض هذه التعريفات تتطابق مع اختلاف الأسماء؛ فمثلاً بينت الدراسة [13] أن المجموعات المفتوحة - b^* هي المجموعات شبه المفتوحة مبدئياً أو المفتوحة-β، وأن المجموعات المفتوحة-b^{**} هي تماما المجموعات المفتوحة- α . كما أنه قد وجدت تعريفات مختلفة لنفس المسميات، فمثلاً عرف الباحثان في [9] مفهوماً للمجموعات المفتوحة-b^* والدوال المتصلة-b^* يختلف عما قدمه باحثان آخران لنفس التسمية في [11].

درس إكيجي [3] الدوال المتصلة-b في الفضاء التبولوجي ونبه إلى أن فئة المجموعات المفتوحة-γ تطابق فئة المجموعات المفتوحة-ps وتطابق فئة المجموعات المفتوحة - b. كذلك الورقات [15] و[16] درست العلاقة بين بعض المسميات الأخرى للمجموعات المفتوحة المعممة وثبت أن بعضها متكافئ.

هدف هذه الورقة هو دراسة الفرق بين التعريفين المذكورين في المراجع [9] و[11] وقد تم إثبات أنهما غير متكافئين. كما تمت دراسة المجموعات المفتوحة- b^* والدوال المتصلة-b^* في الفضاءات التبولوجية. تشتمل هذه الورقة علاوة على ما سبق على التعريفات الأساسية وبعض الأمثلة التوضيحية المتعلقة بالمجموعات المفتوحة-b والمجموعات المفتوحة-b^*، والمفاهيم الأساسية للدوال المتصلة-b. كذلك المفاهيم الأساسية وخصائص الدوال المتصلة - b^*، ومفهوم الدوال المفتوحة - b^* والمغلقة-b^* وخصائصها.

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن A مجموعة من X، فإن المجموعة $int(A)$ هي مجموعة النقاط الداخلية Interior point للمجموعة A. كذلك المجموعة $\bar{A}$ هي غلاقة Closure المجموعة A.

المجموعات المفتوحة-b والمجموعات المفتوحة-b^* والمجموعات المفتوحة- b^*

تم خلال السنوات السابقة تقديم العديد من التعريفات التي تعتبر تعميماً لتعريف المجموعة المفتوحة في الفضاء التبولوجي. تعرف بعض هذه التعميمات بطريقة مشابهة عن طريق أخذ الغلاقة والداخلية لمجموعة ما بطريقة متتابعة كالتعريفات الأربعة في تعريف 1. ويعرف بعضها الآخر عن طريق أخذ الاتحاد أو التقاطع للمجموعات الناتجة من إجراء سلسلة الغلاقة والداخلية كالتعريفات في تعريف 2 وتعريف 3. في هذا البند سنقوم بعرض بعض هذه التعريفات ودراسة بعض العلاقات بينها.

تعريف 1: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى:

1. **مجموعة مفتوحة-α (α-set)** [12] إذا كانت
$$A \subseteq int(\overline{int(A)})$$
2. مجموعة **نصف مفتوحة (semi-open)** [7] إذا كانت
$$A \subseteq \overline{int(A)}$$
3. مجموعة **مفتوحة مبدئيا (preopen)** [8] إذا كانت
$$A \subseteq int(\bar{A})$$
4. **مجموعة مفتوحة-β (β-set)** [2] إذا كانت
$$A \subseteq \overline{int(\bar{A})}$$

تعريف 2 [1]: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى:

1. مجموعة **مفتوحة-b (b-open)** إذا كانت تحقق
$$A \subseteq \overline{int(A)} \cup int(\bar{A}).$$
2. مجموعة **مغلقة-b (b-closed)** إذا كانت تحقق
$$\overline{int(A)} \cap int(\bar{A}) \subseteq A.$$

ملاحظة: عائلة كل المجموعات المفتوحة-b يرمز لها بالرمز $BO(X)$، وعائلة كل المجموعات المغلقة-b يرمز لها بالرمز $BC(X)$.

مبرهنة 1: إذا كانت A مجموعة مفتوحة-α، فإنها مفتوحة-b.

البرهان: بما أن $A \subseteq int(\overline{int(A)})$. كذلك $int(B) \subseteq B \subseteq \bar{B}$ لأي مجموعة عليه يكون

$$A \subseteq int(\overline{int(A)}) \subseteq int(\bar{A})$$
$$\subseteq \overline{int(A)} \cup int(\bar{A}). \quad \square$$

مثال 1: في الفضاء التبولوجي العادي $(\mathbb{R},\tau)$، المجموعة $A=[0,1]\cup\{(1,2)\cap\mathbb{Q}\}$ هي مجموعة مفتوحة-b ولكنها ليست مفتوحة-α.

تعريف 3 [5]: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى:

1. مجموعة **مفتوحة-b*** إذا كانت
$$A \subseteq \overline{int(A)} \cap int(\bar{A})$$
2. مجموعة **مغلقة-b*** إذا كانت
$$int(A) = \emptyset = int(\overline{int(A)}),$$

ملاحظة: من السهل اثبات أن كل مجموعة مفتوحة -b* هي مجموعة نصف مفتوحة ومفتوحة مبدئيا في آن واحد.

تمهيدية 1 [15]: إذا كانت $A \subseteq X$، فإن A هي مفتوحة-α إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة U بحيث إن
$$U \subseteq A \subseteq int(\bar{U}).$$

مبرهنة 2 [15]: إذا كانت $A \subseteq X$ فإن الجمل الآتية متكافئة:

1. A هي مجموعة مفتوحة-b*.
2. A هي مجموعة مفتوحة-α .

البرهان: $(1) \Longleftarrow (2)$ إذا كانت A مجموعة مفتوحة-b* فعليه
$$A \subseteq \overline{int(A)} \cap int(\bar{A}) \subseteq \overline{int(A)}$$
بذلك $\bar{A} \subseteq \overline{int(A)}$. منها $int(\bar{A}) \subseteq int(\overline{int(A)})$ وهذا يضمن أن
$$A \subseteq \overline{int(A)} \cap int(\bar{A}) \subseteq int(\bar{A}) \subseteq int(\overline{int(A)}).$$
$(2) \Longleftarrow (1)$ إذا كانت A مجموعة مفتوحة-α فإن
$$A \subseteq int(\overline{int(A)}) \subseteq \overline{int(A)} \qquad (I)$$
من جهة أخرى فإنه $int(A) \subseteq A$ وهذا يؤدي إلى
$$A \subseteq int(\overline{int(A)}) \subseteq int(\bar{A}) \qquad (II)$$
من (I) و(II) $A \subseteq \overline{int(A)} \cap int(\bar{A})$ أي أن A هي مجموعة مفتوحة-b*.

التعريفان الآتيان استخدما لوصف نفس النوع من المجموعات (نفس التسمية) إلا أنهما غير متكافئين.

تعريف 4 [9]: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى:

1. مجموعة **مغلقة - b^*** (b^* **-closed**) إذا كانت $int(\bar{A}) \subseteq U$ كلما كانت $A \subseteq U$ و U مجموعة مفتوحة-b.
2. مجموعة **مفتوحة-b^*** (b^***- open**) إذا كانت مكملتها مغلقة- b^*

تعريف 5 [11]: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى:

1] مجموعة **مفتوحة-b^*** اذا كانت
$$A \subseteq \overline{int(\bar{A})} \cup int(\bar{A})$$
2] مجموعة **مغلقة-b^*** إذا كانت
$$int(\overline{int(A)}) \cap \overline{int(A)} \subseteq A$$

ملاحظة: من الواضح أن $\overline{int(\bar{A})} \cup int(\bar{A}) = \overline{int(\bar{A})}$ و بذلك تعريف 5 للمجموعة مفتوحة - b^* هو نفس تعريف المجموعة مفتوحة-β في التعريف 1. كذلك لاحظ أنه في الفقرة الثانية $int(\overline{int(A)}) \cap \overline{int(A)} = int(\overline{int(A)})$.

مبرهنة 3 [15]: إذا كانت $A \subseteq X$ فإن الجمل التالية متكافئة:

1. A هي مجموعة مفتوحة-b^* (حسب التعريف 5).
2. A هي مجموعة مفتوحة-β .

البرهان: مباشر.

المثال الآتي يدرس علاقة التعريفين 4 و 5 ببعضهما.

مثـال 2: لتكن $X=\{a,b,c\}$ مع التوبولوجي $\tau = \{X,\phi,\{a\}\}$، فإن المجموعة $B=\{a,b\}$ هي مغلقة- b^* (حسب التعريف 4). ولكن $int(B)=\{a\}$ و$\overline{int(B)} = X$وعليه $\overline{int(B)} \nsubseteq B$ وبالتالي ليست مغلقة - b^* حسب التعريف 5. كذلك بأخذ المجموعة $A=\{b\}$، لاحظ أن
$$\overline{int(A)} \cup int(\bar{A}) \subseteq A$$
عليه المجموعة A هي مغلقة - b^* حسب التعريف 5. كذلك $int(\bar{A}) = int\{b,c\} = \emptyset$ وبالتالي هي ايضا مغلقة- b^* حسب التعريف 4. الآن بأخذ التبولوجي العادي $(\mathbb{R},\tau)$، من السهل اثبات أن المجموعة $C=\{0\}\cup[1,2)\cup\{(4,5)\cap\mathbb{Q}\}$ هي مغلقة -b^* حسب التعريف 5. المجموعة $U=\{0\}\cup[1,2)\cup\{(4,5)\cap\mathbb{Q}\}$ هي مجموعة تحتوي C و مفتوحة-b، لكن $int(\bar{C}) \nsubseteq U$ عليه ليست مغلقة -b^* حسب التعريف 4. ولذا فإن التعريفين غير متكافئان.

ملاحظة: هذه الورقة ستعتمد التعريف 5 للمجموعات المفتوحة-b^* إذ أنه يعتمد على المجموعة A فقط.

ملاحظات:

1. كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة -b ومفتوحة-b^* (بالتعريفين 4 و5) ومفتوحة-b^*. وذلك يتبع مباشرة من خواص المجموعات المفتوحة حيث أنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإن $A = int(A)$، $A \subseteq \bar{A} = \overline{int(A)}$، $A \subseteq int(\bar{A})$.
2. كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة -b ومغلقة-b^* (بالتعريفين 4 و5) ومغلقة-b^*.
3. يرمز لعائلة كل المجموعات المفتوحة -b^* بالرمز $BO(X)^*$، وعائلة كل المجموعات المغلقة-b^*يرمز لها بالرمز $BC(X)^*$.
4. يرمز لعائلة كل المجموعات المفتوحة -b^* بالرمز $B^*O(X)$، وعائلة كل المجموعات المغلقة-b^* يرمز لها بالرمز $B^*C(X)$.

مبرهنة 4: إذا كانت $A \subseteq X$. الجمل التالية صحيحة:

[1] كل مجموعة مفتوحة-b^*هي مفتوحة-b.

[2] كل مجموعة مغلقة-b^*هي مغلقة-b.

البرهان: البرهان مباشر باستخدام حقيقة أن تقاطع أي مجموعتين هو مجموعة جزئية من اتحادهما والتعريف 5.

مثال 3: لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ والتبولوجي
$$\tau = \{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\},$$
المجموعة $A=\{b,c,d\}$ هي مجموعة مفتوحة-b لأن
$$\overline{int(A)} \cup int(\bar{A}) = \{b,c,d,e\} \supseteq A,$$
كذلك
$$\overline{int(A)} \cap int(\bar{A}) = \{b,c,d,e\} \supseteq A,$$
بذلك هي مفتوحة-b^* ولكنها ليست مفتوحة. كذلك $B=\{a,b\}$ هي مجموعة مغلقة-b لأن
$$\overline{int(B)} \cap int(\bar{B}) = \{a\} \subseteq B,$$
ولكنها ليست مغلقة.

مثال 4: في الفضاء التبولوجي العادي $(\mathbb{R}, \tau)$، المجموعة $A = [0,1] \cup \{(1,2) \cap \mathbb{Q}\}$ هي مجموعة مفتوحة-b ومغلقة-b أيضا، حيث $\mathbb{Q}$ مجموعة الاعداد القياسية. كذلك المجموعة A ليست مجموعة مفتوحة-b^*ولا مغلقة-b^*.

مثال 5: في الفضاء التبولوجي المتقطع كل مجموعة جزئية هي مجموعة مفتوحة-b^*ومجموعة مغلقة-b^*وكذلك هي مجموعة مفتوحة-b ومغلقة-b.

مبرهنة 5 [1]: إذا كانت $A \subseteq X$ ، فالجمل الآتية متكافئة

1. A هي مجموعة مفتوحة-b.
2. $A = A \cap \left(\overline{int(A)} \cup int(\bar{A})\right)$
3. A^c هي مجموعة مغلقة-b.

البرهان: سوف نكتفي ببرهان الفقرة $(1) \Leftarrow (3)$. إذا كانت A مجموعة مفتوحة-b، وعليه $A \subseteq \overline{int(A)} \cup int(\bar{A})$ وبذلك

$$\left(\overline{int(A)} \cup int(\bar{A})\right)^C \subseteq A^C$$

ومنها نجد

$$\overline{int(A^C)} \cap int\left(\overline{A^C}\right) \subseteq A^C$$

أي أن A^C مجموعة مغلقة-b.

مبرهنة 6 [1]:

a) اتحاد أي عائلة من المجموعات المفتوحة-b هو مجموعة مفتوحة-b.

b) تقاطع مجموعتين مفتوحتين-b هو مجموعة مفتوحة-b.

c) المجموعة $BO(X)$ تولد تبولوجي على الفضاء X .

البرهان: من خصائص الاتحاد والتقاطع للمجموعات المفتوحة والمغلقة.

مبرهنة 7 [4]: تقاطع مجموعة مفتوحة-b مع مجموعة مفتوحة-b^*هو مجموعة مفتوحة-b.

البرهان: البرهان يعتمد على حقيقة أن كل مجموعة مفتوحة-b^*هي مفتوحة-b، والباقي من الفقرة الثانية من المبرهنة 7.

تعريف 6 [14]: المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X, τ) تسمى بمجموعة **مغلقة موضعيا (locally closed)** إذا كانت $A = U \cap V$، حيث U^c, V مجموعات مغلقة.

ملاحظة: كل مجموعة مغلقة هي مغلقة موضوعيا وذلك بأخذ تقاطعها مع المجموعة X.

مبرهنة 8 [6]: الجمل الآتية متكافئة منطقيا

a) A مجموعة مفتوحة

b) A مجموعة مفتوحة-b^* ومغلقة موضعيا.

c) A مجموعة مفتوحة-b ومغلقة موضعيا.

البرهان:

a) $\Leftarrow$ (b بما أن A مجموعة مفتوحة، عليه

$$A = int(A) \subseteq \overline{int(A)}$$

كذلك كل مجموعة هي مجموعة جزئية من غلاقتها بذلك

$$A \subseteq int(\bar{A}),$$

إذن

$$A \subseteq \overline{int(A)} \cap int(\bar{A}).$$

عليه A مجموعة مفتوحة-b^*. من الصيغة السابقة نجد

$$A = \overline{int(A)} \cap (int(\bar{A}) \cap A) := V \cap U,$$

بذلك هي مغلقة موضعيا.

b) $\Leftarrow c$) سبق أن برهنا على ذلك.

c) $\Leftarrow a$) نفرض أن $A = U \cap V$، حيث V مجموعة مغلقة و U مجموعة مفتوحة وكلاهما يحوي A. إذن:

$$A = (A \cap U) \cap (A \cap V) = int(A) \cap \bar{A}$$

وحيث أن A مجموعة مفتوحة-b تحقق أن $A \subseteq \overline{int(A)} \cup int(\bar{A})$ ، فإن

$$A = int(A) \cap \bar{A} \subseteq int(A) \cap \left(\overline{int(A)} \cup \overline{int(\bar{A})}\right)$$

$$= \left(int(A) \cap \overline{int(A)}\right) \cup \left(int(A) \cap \overline{int(\bar{A})}\right)$$

$$= int(A) \cup int(A) = int(A)$$

إذن A مفتوحة.

الاتصال

منذ أن عرفت المجموعات شبه المفتوحة كتعميم للمجموعات المفتوحة، تم أيضاً تعميم فكرة اتصال الدالة بين فضاءين تبولوجيين وتم تقديم العديد من التعريفات للدوال المتصلة وفقاً للمجموعة شبه المفتوحة المستخدمة. في هذا البند نقدم بعض هذه التعريفات وندرس بعض خواصها.

تعريف 7 [6]: الدالة $f: X \to Y$ من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y، تسمى

1. دالة **متصلة-b** إذا كان
$$f^{-1}(U) \in BO(X) \qquad \forall\, U \in \tau_Y.$$
2. دالة **مفتوحة-b** إذا كان
$$f(U) \in BO(Y) \qquad \forall\, U \in \tau_X.$$
3. دالة **مغلقة-b** إذا كان
$$f(U) \in BC(Y) \qquad \forall\, U^c \in \tau_X.$$
4. دالة **متصلة- b*** إذا كان
$$f^{-1}(U) \in {}^*BO(X) \qquad \forall\, U \in \tau_Y.$$
5. دالة **مفتوحة- b*** إذا كان
$$f(U) \in {}^*BO(Y) \qquad \forall\, U \in \tau_X.$$
6. دالة **مغلقة- b*** إذا كان
$$f(U) \in {}^*BC(Y) \qquad \forall\, U^c \in \tau_X.$$

مثال 6: لتكن المجموعات $X = Y = \{a, b, c\}$ مع الفضاءات $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $\sigma = \{X, \emptyset, \{a, c\}\}$. والدالة f هي الدالة المحايدة، فإن f ليست متصلة لأن $f^{-1}(\{a, c\}) = \{a, c\} \notin \tau$. ولكن f متصلة - b لأن $f^{-1}(\{a, c\}) = \{a, c\} \in BO(X)$. كذلك يمكن اثبات أن الدالة f متصلة-b^* بسهولة. بالمثل الدالة f ليست مفتوحة ولا مفتوحة-b^* لأن $f(\{a\}) = \{a\} \notin \sigma$ و $\{a\} \notin {}^*BO(Y)$. ولكنها مفتوحة-b لأن $\{a\} \in BO(Y)$.

مثال 7: بأخذ الدالة الثابتة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = c, \forall x \in X$$

فإن الدالة f متصلة ومتصلة-b ومتصلة-b^* لأن $f^{-1}(\{c\}) = \mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة ومفتوحة-b ومجموعة مفتوحة-b^*. بينما الدالة f ليست مفتوحة ولا مفتوحة-b أو مفتوحة-b^* لأن لكل $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ فإن $f(A) = \{c\}$ و$\{c\}$ ليست مجموعة مفتوحة ولا مفتوحة-b أو مفتوحة-b^*.لكن الدالة fمغلقة ومغلقة-b ومغلقة-b^* لأن $\{c\}$ مجموعة مغلقة ومغلقة-b ومغلقة-b^*.

مبرهنة 9 [10]: لتكن $f: X \to Y$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y، إذا كانت f متصلة، فإن f متصلة-b.

المبرهنات 11-16 وردت في [10] وأثبتت للمجموعات المفتوحة - b^* حسب التعريف 5. إلا أنها أيضاً صحيحة للمجموعات المفتوحة-b^* حسب التعريف 4 و كذلك صحيحة للمجموعات المفتوحة-b^*.

مبرهنة 10 : لتكن $f: X \to Y$ دالة من الفضاء التبولوجي X إلى الفضاء التبولوجي Y، إذا كانت f دالة متصلة فإن f دالة متصلة-b^*.

البرهان:

نفرض أن $f: X \to Y$ دالة متصلة و M هي مجموعة مفتوحة في Y، إذا $f^{-1}(M)$ مجموعة مفتوحة في X وبما أن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة-b^* ، فإن $f^{-1}(M)$ مجموعة مفتوحة-b^* في X، و بالتالي فإن f متصلة-b^*.

مثال 8: لتكن المجموعات $X = Y = \{a, b, c\}$ مع الفضاءات $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $\sigma = \{X, \emptyset, \{a, c\}\}$ و f هي الدالة المحايدة، فإن f ليست متصلة لأن $f^{-1}(\{a, c\}) = \{a, c\}$ و $\{a, c\}$ ليست مجموعة مفتوحة في X، ولكنها f متصلة-b^*.

مبرهنة 11:

الدالة $f: X \to Y$ هي دالة متصلة-b^* إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة-b^* في Y هي مجموعة مغلقة-b^* في X.

البرهان: نفرض أن F مجموعة مغلقة في Y، إذا F^C مجموعة مفتوحة في Y. وبما أن f دالة متصلة-b^* فإن $f^{-1}(F^C)$ هي مجموعة مفتوحة-b^* في X، ولكن

$$f^{-1}(F^C) = f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$$

بالتالي فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة-b^* في X.

والآن بالعكس، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y،أي أن V^C مجموعة مغلقة في Y، إذا

$$f^{-1}(V^C) = f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$$

مجموعة مغلقة-b * بالتالي $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة-b^* ، أي أن f هي الدالة المتصلة-b^*.

خصائص الدوال المفتوحة-b^* والمغلقة-b^*

في هذا البند نعرض بعض خواص الدوال المفتوحة-b^* والمغلقة-b^* مع بعض الأمثلة.

مبرهنة 12 :

كل دالة مفتوحة هي دالة مفتوحة-b^* ودالة مفتوحة-b .

البرهان: لنفرض أن $f: X \to Y$ دالة مفتوحة و V مجموعة مفتوحة في X ، فإن $f(V)$ مجموعة مفتوحة، وبما أن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة-b^*، فإن $f(V)$ مجموعة مفتوحة-b^* في Y، عليه f هي دالة مفتوحة-b^*. الفقرة الثانية برهانها مماثل للبرهان السابق.

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح. والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال 9: لتكن $X = Y = \{a, b, c\}$ حيث

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

$$\sigma = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

ولتكن $f: X \to Y$ دالة معرفة بالشكل الآتي

$$f(a) = f(b) = a, f(c) = c$$

بالتالي فإن f دالة مفتوحة-b و كذلك مفتوحة-b^*، ولكنها ليست مفتوحة لأن صورة المجموعة المفتوحة $\{a, c\}$ في X هي $\{a, c\}$ وهي ليست مفتوحة في Y.

مبرهنة 13: كل دالة مغلقة هي دالة مغلقة-b^*ودالة مغلقة- b .

البرهان: لتكن $f: X \to Y$ دالة مغلقة و V مجموعة مغلقة في X، فإن $f(V)$ مجموعة مغلقة وبما أن كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة-b^*فإن $f(V)$ مجموعة مغلقة-b^*في Y، أي أن f دالة مغلقة-b^*. الفقرة الثانية برهانها مماثل للبرهان السابق.

ملاحظة: عكس المبرهنة السابقة غير صحيح.

مبرهنة 14: إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متصلة ومغلقة-b^*و A مجموعة مغلقة-b^* في X، فإن $f_A: A \to Y$ دالة متصلة ومغلقة-b^* .

البرهان: لتكن $f: X \to Y$ دالة متصلة و A مجموعة مغلقة-b^* . من خواص الدالة المتصلة، التقييد f_A هو دالة متصلة ،والآن نفرض أن F مجموعة مغلقة-b^* في A فإن F مجموعة مغلقة في X، عليه فإن $f(F)$ مجموعة مغلقة-b^*في Y، وعليه f دالة متصلة ومغلقة-b^*.

مبرهنة 15: إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ مغلقة، والدالة $g: Y \to \tau$ مغلقة-b^*فإن $gof: X \to \tau$ مغلقة-b^*.

البرهان: لتكن H مجموعة مغلقة في X، فإن $f(H)$ مجموعة مغلقة في Y وبما أن كل مغلقة هي مغلقة-b^* فإن $f(H)$ مغلقة-b^*وعليه $g(f(H))$ مغلقة-b^* في τ لأن g دالة مغلقة-b^* ، وبما أن $gof(H) = g(f(H))$ وبالتالي gof دالة مغلقة-b^*.

المراجع

1] D. Andrijevic, *On b-open sets*, Mat. Vesink, 48, 59 – 64. 1996.

2] S. Eldeeb M. Abd Elmonsef and R. Mahmoud. *β-open sets and β-continouos mapping*. Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. A, 12(1):77-90. 1983.

3] E. Ekici and M. Caldas, *Slightly γ-continuous functions*, Bol. Soc. Parana. Mat, 22(3), 63-74, 2004.

4] C. Granados. *A new decomposition of open and closed sets in topological spaces*. Selecciones Matematicas.8(1):66–74. 2021.

5] T. Indira and K. Rekha. *On locally **b-closed sets*. Proceedings of the Heber International Conference on Applications of Mathematics and Statistics. (HICAMS) 2012

6] T. Indira and K. Rekha. *Applications of *b-open Sets and **b-open Sets in Topological Spaces*. Annals of Pure and Applied Mathematics. 1(1), 44-56. 2012.

7] N. levien. *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*. Amer. Math.Monthly. 70:36-41. 1963.

A. Mashhour, M. Abd Elmonsef and S. El-Deeb. *On precontinuous and weak precontinuous mapping*. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt. 53,47-53. 1982.

8] S. Muthuvel and R. Parimelazhagan. *b^*-closed sets in topological spaces*. International J. of Math. analysis. 6(47), 2317-2323. 2012.

9] S. Muthuvel and R. Parimelazhagan. *b^* -continuous functions in topological spaces*.

International J. of Computer Applications. 58(13), 45-47. 2012.

10]S. MEL and M. FHAL. *New Near Open Set in Topological Space*. Journal of Physical Mathematics. 7 (4). 2016.

11]O. Njȧstad. *On some classes of nearly open sets*. Pacific J Math. 15, 961-970. 1965.

12]R. Usha and P. Thangavelu. *On locally #b-closed sets and weakly #b-closed sets*. South Asian Journal of Multidisciplinary. Studies. 2(3):181-196. 2015.

13]S. Willard. *General topology* .Addison Wesley Publishing company. 1968.

14]A. Zanyar . *On types of generalized closed sets*. Journal of Taibah University for Science. 12(3), 290-293. 2018.

15]A. Zanyar and A. Baravan. *A note on some unified types of open and locally closed sets*. General Letters in Mathematics. 4(3), 102-106. 2019.